Одинадцятий Київський математичний фестиваль
8-й клас

1. Чи можна розмістити 2012 різних кіл з однаковим діаметром на площині таким чином, щоб кожне коло дотикалось як мінімум до трьох інших?

2. Сто срібних монет викладені в одну лінію. Чарівник може перетворити срібну монету в золоту за 3 секунди. Кожна золота монета, яка знаходиться поруч з монетою, що перетворюється, зменшує чей час на 1 секунду. За який найменший час чарівник може перетворити всі монети в золоті?

3. Нехай O — центр та R — радіус кола ω, описаного навколо трикутника ABC. Коло ω_1 з центром O_1 та радіусом R проходить через точки A, O та перетинає сторону AC в точці K. Нехай AF — діаметр кола ω та точки F, K, O_1 лежать на одній прямій. Знайти $\angle ABC$.

4. Знайти всі такі натуральні числа a, b, c більші за 1, що $ab+1$ ділиться на c, $bc+1$ ділиться на a і $ca+1$ ділиться на b.

5. Декілька учнів, які мають різний зріст, стоять у ряд. Якби б вони вишикувались за зростом так, щоб справа стояв найвищий, то кожен учень змістився б не більше, ніж на 8 позицій. Довести, що справа від кожного учня стоїть не більше 8 учнів, які нижче за нього.

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Одиннадцатый Киевский математический фестиваль
8-й класс

1. Можно ли разместить 2012 различных окружностей с одинаковым диаметром на плоскости таким образом, чтобы каждая окружность касалась как минимум трёх других?

2. Сто серебряных монет выложены в одну линию. Волшебник может превратить серебряную монету в золотую за 3 секунды. Каждая золотая монета, которая находится рядом с превращаемой, уменьшает это время на 1 секунду. Через какое наименьшее время волшебник может превратить все монеты в золотые?

3. Пусть O — центр и R — радиус окружности ω, описанной около треугольника ABC. Окружность ω_1 с центром O_1 и радиусом R проходит через точки A, O и пересекает сторону AC в точке K. Пусть AF — диаметр окружности ω и точки F, K, O_1 лежат на одной прямой. Найти $\angle ABC$.

4. Найти все такие натуральные числа a, b, c большие 1, что $ab+1$ делится на c, $bc+1$ делится на a и $ca+1$ делится на b.

5. Несколько учеников имеющих разный рост стоят в ряд. Если бы они построились по росту так, чтобы справа стоял самый высокий, то каждый ученик сместился бы не более, чем на 8 позиций. Доказать, что справа от каждого ученика стоит не более 8 учеников, которые ниже него.

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

The eleventh Kyiv mathematical festival
8-th form

1. Is it possible to place 2012 distinct circles with the same diameter on the plane, such that each circle touches at least three others circles?

2. A hundred of silver coins are laid down in a line. A wizard can convert silver coin into golden one in 3 seconds. Each golden coin, which is near the coin being converted, reduces this time by 1 second. What minimal time is required for the wizard to convert all coins to gold?

3. Let O be the center and R be the radius of circumcircle ω of triangle ABC. Circle ω_1 with center O_1 and radius R pass through points A, O and intersects the side AC at point K. Let AF be the diameter of circle ω and points F, K, O_1 are collinear. Determine $\angle ABC$.

4. Find all positive integers a, b, c greater than 1, such that $ab+1$ is divisible by c, $bc+1$ is divisible by a and $ca+1$ is divisible by b.

5. Several pupils with different heights are standing in a row. If they were arranged according to their heights, such that the highest would stand on the right, then each pupil would move for at most 8 positions. Prove that every pupil has no more than 8 pupils lower then him on his right.

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.

Одинадцятий Київський математичний фестиваль
9-й клас

1. Чи можна розмістити 2012 різних кіл з однаковим діаметром на площині таким чином, щоб кожне коло дотикалось як мінімум до трьох інших?

2. Для додатних x, y, z виконується $x + y + z \leqslant 1$. Довести, що $(\frac{1}{x} - 1)(\frac{1}{y} - 1)(\frac{1}{z} - 1) \geqslant 8$.

3. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC. На сторонах AB та AC відмітили точки D та E відповідно так, що $\angle ADO = \angle AEO = 60^\circ$ та чотирикутник $BDEC$ вписаний. Чи обов'язково трикутник ABC є рівнобедреним?

4. Знайти всі такі натуральні числа a, b, c більші за 1, що $ab + 1$ ділиться на c, $bc + 1$ ділиться на a і $ca + 1$ ділиться на b.

5. В шахті з нескінченною кількістю рівнів видобуває руду скінченна кількість гномів. Кожен день в один і той же час один гном з кожного рівня, на якому знаходиться рівно $n = 2, 3, \ldots$ гномів, опускається на $n - 1$ рівнів нижче. Довести, що починаючи з деякого моменту на кожному рівні буде не більше одного гнома.

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Одиннадцатый Киевский математический фестиваль
9-й класс

1. Можно ли разместить 2012 различных окружностей с одинаковым диаметром на плоскости таким образом, чтобы каждая окружность касалась как минимум трёх других?

2. Для положительных x, y, z выполняется $x + y + z \leqslant 1$. Доказать что $(\frac{1}{x} - 1)(\frac{1}{y} - 1)(\frac{1}{z} - 1) \geqslant 8$.

3. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и AC отметили точки D и E соответственно так, что $\angle ADO = \angle AEO = 60^\circ$ и четырёхугольник $BDEC$ вписанный. Обязательно ли треугольник ABC является равнобедренным?

4. Найти все такие натуральные числа a, b, c большие 1, что $ab + 1$ делится на c, $bc + 1$ делится на a и $ca + 1$ делится на b.

5. В шахте с бесконечным числом уровней добывает руду конечное число гномов. Каждый день в одно и то же время один гном с каждого уровня, на котором находится ровно $n = 2, 3, \ldots$ гномов, опускается на $n - 1$ уровней ниже. Доказать, что начиная с некоторого момента на каждом уровне будет не более одного гнома.

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

The eleventh Kyiv mathematical festival
9-th form

1. Is it possible to place 2012 different circles with the same diameter on the plane, such that each circle touches at least three others circles?

2. Positive numbers x, y, z satisfy $x + y + z \leqslant 1$. Prove that $(\frac{1}{x} - 1)(\frac{1}{y} - 1)(\frac{1}{z} - 1) \geqslant 8$.

3. Let O be the circumcenter of triangle ABC. Points D and E are chosen at sides AB and AC respectively such that $\angle ADO = \angle AEO = 60^\circ$ and $BDEC$ is inscribed quadrangle. Prove or disprove that ABC is isosceles triangle.

4. Find all positive integers a, b, c greater than 1, such that $ab + 1$ is divisible by c, $bc + 1$ is divisible by a and $ca + 1$ is divisible by b.

5. Finite number of dwarfs excavates ore in the mine with infinite number of levels. Each day at the same time one dwarf from each level, inhabited with exactly $n = 2, 3, \ldots$ dwarfs, move $n - 1$ levels down. Prove that after some moment there will be no more then one dwarf on each level.

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.

Одинадцятий Київський математичний фестиваль
10-й клас

1. Чи можна розмістити 2012 різних кіл з однаковим діаметром на площині таким чином, щоб кожне коло дотикалось рівно до трьох інших?

2. Для додатних x, y, z виконується $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zy \leqslant 1$. Довести, що $(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{y}-1)(\frac{1}{z}-1) \geqslant 9\sqrt{6}-19$.

3. Нехай O — центр описаного кола трикутника ABC. На сторонах AB та AC відмітили точки D та E відповідно так, що $\angle ADO = \angle AEO = 60^\circ$ та чотирикутник $BDEC$ вписаний. Чи обов'язково трикутник ABC є рівнобедреним?

4. Знайти всі такі натуральні числа a, b, c більші за 1, що $ab+1$ ділиться на c, $bc+1$ ділиться на a і $ca+1$ ділиться на b.

5. В шахті з нескінченною кількістю рівнів видобуває руду скінченна кількість гномів. Кожен день в один і той же час один гном з кожного рівня, на якому знаходиться рівно $n = 1, 2, 3, \ldots$ гномів, опускається на n рівнів нижче. Довести, що починаючи з деякого моменту на кожному рівні буде не більше одного гнома.

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Одиннадцатый Киевский математический фестиваль
10-й класс

1. Можно ли разместить 2012 различных окружностей с одинаковым диаметром на плоскости таким образом, чтобы каждая окружность касалась ровно трёх других?

2. Для положительных x, y, z выполняется $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zy \leqslant 1$. Доказать что $(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{y}-1)(\frac{1}{z}-1) \geqslant 9\sqrt{6}-19$.

3. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. На сторонах AB и AC отметили точки D и E соответственно так, что $\angle ADO = \angle AEO = 60^\circ$ и четырёхугольник $BDEC$ вписанный. Обязательно ли треугольник ABC является равнобедренным?

4. Найти все такие натуральные числа a, b, c большие 1, что $ab+1$ делится на c, $bc+1$ делится на a и $ca+1$ делится на b.

5. В шахте с бесконечным числом уровней добывает руду конечное число гномов. Каждый день в одно и то же время один гном с каждого уровня, на котором находится ровно $n = 1, 2, 3, \ldots$ гномов, опускается на n уровней ниже. Доказать, что начиная с некоторого момента на каждом уровне будет не более одного гнома.

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

The eleventh Kyiv mathematical festival
10-th form

1. Is it possible to place 2012 different circles with the same diameter on the plane, such that each circle touches exactly three others circles?

2. Positive numbers x, y, z satisfy $x^2+y^2+z^2+xy+yz+zy \leqslant 1$. Prove that $(\frac{1}{x}-1)(\frac{1}{y}-1)(\frac{1}{z}-1) \geqslant 9\sqrt{6}-19$.

3. Let O be the circumcenter of triangle ABC. Points D and E are chosen at sides AB and AC respectively such that $\angle ADO = \angle AEO = 60^\circ$ and $BDEC$ is inscribed quadrangle. Prove or disprove that ABC is isosceles triangle.

4. Find all positive integers a, b, c greater than 1, such that $ab+1$ is divisible by c, $bc+1$ is divisible by a and $ca+1$ is divisible by b.

5. Finite number of dwarfs excavates ore in the mine with infinite number of levels. Each day at the same time one dwarf from each level, inhabited with exactly $n = 1, 2, 3, \ldots$ dwarfs, move n levels down. Prove that after some moment there will be no more then one dwarf on each level.

Time allowed: 4 hours. Each problem is worth 7 points.