

Двадцятий Київський математичний фестиваль

8-й клас

1. Розв'язати у цілих числах рівняння $(3a - bc)(3b - ac)(3c - ab) = 1000$.
2. У деяких 11 клітинках клітчастої дошки живуть їжаки. Кожен їжак поділив кількість їжаків у своєму рядку на кількість їжаків у своєму стовпчику. Чи могли у всіх їжаків вийти різні числа?
3. Нехай ω — описане коло трикутника ABC ($AB > AC$), E — середина дуги AC , яка не містить точку B , а F — середина дуги AB , яка не містить точку C . Прямі AF та BE перетинаються в точці P , прямі CF та AE перетинаються в точці R , а дотична до ω в точці A перетинає пряму BC в точці Q . Довести, що точки P, Q, R лежать на одній прямій.
4. Знайти всі набори з 63 цілих чисел таких, що квадрат кожного числа дорівнює сумі всіх інших чисел та не всі числа є однаковими.
5. Більбо складає числовий трикутник з нулів та одиниць таким чином: у верхньому рядку він пише деякі n цифр, а в інших рядках під сусідніми однаковими цифрами завжди пише 0, а під сусідніми різними цифрами — 1. (На рисунку зображено приклад трикутника при $n = 5$.) Скількома способами Більбо може заповнити верхній рядок при $n = 100$ так, аби у кожному з n рядків трикутника кількість одиниць була парною?

На виконання завдання відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Розв'язання задач потрібно надіслати 8 травня 2021 року до 14:20 на електронну адресу

kyiv.math.festival+8@gmail.com

Робота має бути надіслана як один файл з назвою 8ПрізвищеІм'я.pdf (замість ПрізвищеІм'я вкажіть ваші прізвище та ім'я). У листі з роботою вкажіть таку інформацію:

- Прізвище, ім'я, по-батькові;
- команда (місто, школа), клас;
- номери записаних у роботі задач.

Умови та розв'язання задач, а також результати, можна буде знайти за адресою

<https://sites.google.com/view/kyivmathfestival2021>

Двадцатый Киевский математический фестиваль

8-й класс

1. Решить в целых числах уравнение $(3a - bc)(3b - ac)(3c - ab) = 1000$.
2. В некоторых 11 клетках клетчатой доски живут ежи. Каждый ёж поделил количество ежей в своей строке на количество ежей в своем столбце. Могли ли у всех ежей получиться разные числа?
3. Пусть ω — описанная окружность треугольника ABC ($AB > AC$), E — середина дуги AC , не содержащей точку B , а F — середина дуги AB , не содержащей точку C . Прямые AF и BE пересекаются в точке P , прямые CF и AE пересекаются в точке R , а касательная к ω в точке A пересекает прямую BC в точке Q . Доказать, что точки P, Q, R лежат на одной прямой.
4. Найти все наборы из 63 целых чисел таких, что квадрат каждого числа равен сумме всех остальных чисел и не все числа одинаковые.
5. Бильбо составляет числовой треугольник из нулей и единиц таким образом: в верхней строке он пишет некоторые n цифр, а в остальных строках под соседними одинаковыми цифрами всегда пишет 0, а под соседними разными цифрами — 1. (На рисунке изображен пример треугольника при $n = 5$.) Сколькими способами Бильбо может заполнить верхнюю строку при $n = 100$ так, чтобы в каждой из n строк треугольника количество единиц было чётным?

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Решения задач нужно отослать 8 мая 2021 года до 14:20 на электронный адрес

kyiv.math.festival+8@gmail.com

Работа должна быть прислана как один файл с названием 8ФамилияИмя.pdf (вместо ФамилияИмя укажите ваши фамилию и имя). В письме с работой укажите такую информацию:

- Фамилия, имя, отчество;
- команда (город, школа), класс;
- номера записанных в работе задач.

Условия и решения задач, а также результаты, можно будет найти по адресу

<https://sites.google.com/view/kyivmathfestival2021>

Двадцятий Київський математичний фестиваль

9-й клас

1. Чи можна відмітити на площині чотири точки так, що відстані від будь-якої точки до трьох інших утворюють арифметичну прогресію?
2. У декількох клітинках клітчастої дошки живуть їжаки. Кожен їжак помножив кількість їжаків у своєму рядку на кількість їжаків у своєму стовпчику. Чи могли у всіх їжаків вийти різні числа?
3. Нехай AD — висота, AE — медіана та O — центр описаного кола трикутника ABC . В середині трикутника обрали точки X та Y так, що $\angle BAX = \angle CAU$, $OX \perp AX$ та $OY \perp AY$. Довести, що точки D, E, X, Y лежать на одному колі.
4. Знайти всі набори з 63 цілих чисел таких, що квадрат кожного числа дорівнює сумі всіх інших чисел та не всі числа є однаковими.
5. Фродо складає числовий трикутник з нулів та одиниць таким чином: у верхньому рядку він пише деякі n цифр, а в інших рядках під сусідніми однаковими цифрами завжди пише 0, а під сусідніми різними цифрами — 1 (На рисунку зображено приклад трикутника при $n = 5$.) Скількома способами Фродо може заповнити верхній рядок при $n = 100$ так, аби у кожному з n рядків трикутника кількість одиниць була непарною?

На виконання завдання відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Розв'язання задач потрібно надіслати 8 травня 2021 року до 14:20 на електронну адресу

kyiv.math.festival+9@gmail.com

Робота має бути надіслана як один файл з назвою 9ПрізвищеІм'я.pdf (замість ПрізвищеІм'я вкажіть ваші прізвище та ім'я). У листі з роботою вкажіть таку інформацію:

- Прізвище, ім'я, по-батькові;
- команда (місто, школа), клас;
- номери записаних у роботі задач.

Умови та розв'язання задач, а також результати, можна буде знайти за адресою

<https://sites.google.com/view/kyivmathfestival2021>

Двадцатый Киевский математический фестиваль

9-й класс

1. Можно ли отметить на плоскости четыре точки так, что расстояния от любой точки до трёх остальных образуют арифметическую прогрессию?
2. В нескольких клетках клетчатой доски живут ежи. Каждый ёж умножил количество ежей в своей строке на количество ежей в своём столбце. Могли ли у всех ежей получиться разные числа?
3. Пусть AD — высота, AE — медиана и O — центр описанной окружности треугольника ABC . Внутри треугольника выбрали точки X и Y так, что $\angle BAX = \angle CAU$, $OX \perp AX$ и $OY \perp AY$. Доказать, что точки D, E, X, Y лежат на одной окружности.
4. Найти все наборы из 63 целых чисел таких, что квадрат каждого числа равен сумме всех остальных чисел и не все числа одинаковые.
5. Фродо составляет числовой треугольник из нулей и единиц таким образом: в верхней строке он пишет некоторые n цифр, а в остальных строках под соседними одинаковыми цифрами всегда пишет 0, а под соседними разными цифрами — 1 (На рисунке изображен пример треугольника при $n = 5$.) Сколькими способами Фродо может заполнить верхнюю строку при $n = 100$ так, чтобы в каждой из n строк треугольника количество единиц было нечётным?

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Решения задач нужно отослать 8 мая 2021 года до 14:20 на электронный адрес

kyiv.math.festival+9@gmail.com

Работа должна быть прислана как один файл с названием 9ФамилияИмя.pdf (вместо ФамилияИмя укажите ваши фамилию и имя). В письме с работой укажите такую информацию:

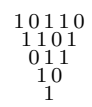
- Фамилия, имя, отчество;
- команда (город, школа), класс;
- номера записанных в работе задач.

Условия и решения задач, а также результаты, можно будет найти по адресу

<https://sites.google.com/view/kyivmathfestival2021>

Двадцятий Київський математичний фестиваль

10-й клас

1. Чи можна відмітити на площині чотири точки так, що відстані від будь-якої точки до трьох інших утворюють арифметичну прогресію?
2. Нехай $a, b, c \geq 0$ та $a + b + c = 3$. Довести, що $(3a - bc)(3b - ac)(3c - ab) \leq 8$.
3. Чи при кожному $n \geq 2021$ існує n цілих чисел таких, що квадрат кожного числа дорівнює сумі всіх інших чисел та не всі числа є однаковими?
4. Фродо складає числовий трикутник з нулів та одиниць таким чином: у верхньому рядку він пише деякі n цифр, а в інших рядках під сусідніми однаковими цифрами завжди пише 0, а під сусідніми різними цифрами — 1 (На рисунку зображено приклад трикутника при $n = 5$.) Скількома способами Фродо може заповнити верхній рядок при $n = 100$ так, аби у кожному з n рядків трикутника кількість одиниць була непарною?

5. Нехай ω — описане коло трикутника ABC ($AB \neq AC$), I — центр вписаного кола, P — точка на ω , для якої $\angle API = 90^\circ$, S — точка перетину прямих AP та BC , W — точка перетину прямої AI з ω . Пряма, яка проходить через точку W перпендикулярно до AW , перетинає AP та BC у точках D та E відповідно. Довести, що $SD = IE$.

На виконання завдання відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Розв'язання задач потрібно надіслати 8 травня 2021 року до 14:20 на електронну адресу

kyiv.math.festival+10@gmail.com

Робота має бути надіслана як один файл з назвою 10ПрізвищеІм'я.pdf (замість ПрізвищеІм'я вкажіть ваші прізвище та ім'я). У листі з роботою вкажіть таку інформацію:

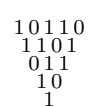
- Прізвище, ім'я, по-батькові;
- команда (місто, школа), клас;
- номери записаних у роботі задач.

Умови та розв'язання задач, а також результати, можна буде знайти за адресою

<https://sites.google.com/view/kyivmathfestival2021>

Двадцатый Киевский математический фестиваль

10-й класс

1. Можно ли отметить на плоскости четыре точки так, что расстояния от любой точки до трёх остальных образуют арифметическую прогрессию?
2. Пусть $a, b, c \geq 0$ и $a + b + c = 3$. Доказать, что $(3a - bc)(3b - ac)(3c - ab) \leq 8$.
3. При каждом ли $n \geq 2021$ существует n целых чисел таких, что квадрат каждого числа равен сумме всех остальных чисел и не все числа одинаковые?
4. Фродо составляет числовой треугольник из нулей и единиц таким образом: в верхней строке он пишет некоторые n цифр, а в остальных строках под соседними одинаковыми цифрами всегда пишет 0, а под соседними разными цифрами — 1 (На рисунке изображен пример треугольника при $n = 5$.) Сколькими способами Фродо может заполнить верхнюю строку при $n = 100$ так, чтобы в каждой из n строк треугольника количество единиц было нечётным?

5. Пусть ω — описанная окружность треугольника ABC ($AB \neq AC$), I — центр вписанной окружности, P — точка на ω , для которой $\angle API = 90^\circ$, S — точка пересечения прямих AP и BC , W — точка пересечения прямой AI с ω . Прямая, проходящая через точку W перпендикулярно к AW , пересекает AP и BC в точках D и E соответственно. Доказать, что $SD = IE$.

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Решения задач нужно отослать 8 мая 2021 года до 14:20 на электронный адрес

kyiv.math.festival+10@gmail.com

Работа должна быть прислана как один файл с названием 10ФамилияИмя.pdf (вместо ФамилияИмя укажите ваши фамилию и имя). В письме с работой укажите такую информацию:

- Фамилия, имя, отчество;
- команда (город, школа), класс;
- номера записанных в работе задач.

Условия и решения задач, а также результаты, можно будет найти по адресу

<https://sites.google.com/view/kyivmathfestival2021>