

**Тринадцятий Київський математичний фестиваль**  
**8-й клас**

1. На прямій сидять дві білі та дві чорні кішки. Сума відстаней від білих кішок до однієї чорної кішки дорівнює 4, а до іншої 8. Сума відстаней від чорних кішок до однієї білої кішки дорівнює 3, а до іншої 9. Які кішки сидять крайніми?
2. Чи можна покрити дошку розміром  $8 \times 8$  за допомогою 13 однакових п'ятиклітинкових фігурок? Фігурки дозволяється як завгодно повертати та перевертати.
3. У турнірі з квиддичу брали участь 8 команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. Довести, що існують такі команди  $A, B, C, D$ , що команди  $A, B$  разом та  $C, D$  разом набрали однакову кількість перемог.
4. Довести, що при кожному натуральному  $y$  рівність

$$\text{НСК}(x, y + 1) \cdot \text{НСК}(x + 1, y) = x(x + 1)$$

виконується при нескінченній кількості натуральних значень  $x$  (тут  $\text{НСК}(a, b)$  — найменше спільне кратне чисел  $a$  та  $b$ ).

5. Нехай  $AD, BE$  — висоти, а  $CF$  — бісектриса гострокутного нерівнобедреного трикутника  $ABC$ , причому  $AE + BD = AB$ . Позначимо  $I_A, I_B, I_C$  точки перетину бісектрис трикутників  $AEF, BDF, CDE$  відповідно. Довести, що точки  $D, E, F, I_A, I_B$  та  $I_C$  лежать на одному колі.

На виконання завдання відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

**Тринадцятий Киевский математический фестиваль**  
**8-й класс**

1. На прямой сидят две белые и две черные кошки. Сумма расстояний от белых кошек до одной черной кошки равна 4, а до другой 8. Сумма расстояний от черных кошек до одной белой кошки равна 3, а до другой 9. Какие кошки сидят крайними?
2. Можно ли покрыть доску размером  $8 \times 8$  с помощью 13 одинаковых пятиклеточных фигурок? Фигурки разрешается как угодно поворачивать и переворачивать.
3. В турнире по квиддичу участвовали 8 команд, каждая сыграла с каждой другой один раз без ничьих. Доказать, что существуют такие команды  $A, B, C, D$ , что команды  $A, B$  вместе и  $C, D$  вместе набрали одинаковое количество побед.
4. Доказать, что при каждом натуральном  $y$  равенство

$$\text{НОК}(x, y + 1) \cdot \text{НОК}(x + 1, y) = x(x + 1)$$

выполняется при бесконечном количестве натуральных значений  $x$  (тут  $\text{НОК}(a, b)$  — наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$ ).

5. Пусть  $AD, BE$  — высоты, а  $CF$  — биссектриса остроугольного неравнобедренного треугольника  $ABC$ , причем  $AE + BD = AB$ . Обозначим  $I_A, I_B, I_C$  точки пересечения биссектрис треугольников  $AEF, BDF, CDE$  соответственно. Доказать, что точки  $D, E, F, I_A, I_B$  и  $I_C$  лежат на одной окружности.

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

**Тринадцятий Київський математичний фестиваль**  
**9-й клас**

1. На прямій сидять дві білі та дві чорні кішки. Сума відстаней від білих кішок до однієї чорної кішки дорівнює 4, а до іншої 8. Сума відстаней від чорних кішок до однієї білої кішки дорівнює 3, а до іншої 9. Які кішки сидять крайніми?
2. Нехай  $x, y, z$  — такі дійсні числа, що  $(x - z)(y - z) = x + y + z - 3$ . Довести, що  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ .
3. У турнірі з квіддичу брали участь 8 команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічий. Довести, що існують такі команди  $A, B, C, D$ , що команди  $A, B$  разом та  $C, D$  разом набрали однакову кількість перемог.
4. Довести, що існує натуральне число  $y$  таке, що рівність

$$\text{НСК}(x, y + 1) \cdot \text{НСК}(x + 1, y) = y(y + 1)$$

виконується принаймні при 2014 натуральних значеннях  $x$  (тут  $\text{НСК}(a, b)$  — найменше спільне кратне чисел  $a$  та  $b$ ).

5. Нехай  $AD, BE$  — висоти, а  $CF$  — бісектриса гострокутного нерівнобедреного трикутника  $ABC$ , причому  $AE + BD = AB$ . Позначимо  $I_A, I_B, I_C$  точки перетину бісектрис трикутників  $AEF, BDF, CDE$  відповідно. Довести, що точки  $D, E, F, I_A, I_B$  та  $I_C$  лежать на одному колі.

На виконання завдання відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

**Тринадцятий Киевский математический фестиваль**  
**9-й класс**

1. На прямой сидят две белые и две черные кошки. Сумма расстояний от белых кошек до одной черной кошки равна 4, а до другой 8. Сумма расстояний от черных кошек до одной белой кошки равна 3, а до другой 9. Какие кошки сидят крайними?
2. Пусть  $x, y, z$  — такие действительные числа, что  $(x - z)(y - z) = x + y + z - 3$ . Доказать, что  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ .
3. В турнире по квиддичу участвовали 8 команд, каждая сыграла с каждой другой один раз без ничьих. Доказать, что существуют такие команды  $A, B, C, D$ , что команды  $A, B$  вместе и  $C, D$  вместе набрали одинаковое количество побед.
4. Доказать, что существует натуральное число  $y$  такое, что равенство

$$\text{НОК}(x, y + 1) \cdot \text{НОК}(x + 1, y) = y(y + 1)$$

выполняется хотя бы при 2014 натуральных значениях  $x$  (тут  $\text{НОК}(a, b)$  — наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$ ).

5. Пусть  $AD, BE$  — высоты, а  $CF$  — биссектриса остроугольного неравнобедренного треугольника  $ABC$ , причем  $AE + BD = AB$ . Обозначим  $I_A, I_B, I_C$  точки пересечения биссектрис треугольников  $AEF, BDF, CDE$  соответственно. Доказать, что точки  $D, E, F, I_A, I_B$  и  $I_C$  лежат на одной окружности.

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

**Тринадцятий Київський математичний фестиваль**  
**10-й клас**

1. Нехай  $x, y, z$  — такі дійсні числа, що  $(x - z)(y - z) = x + y + z - 3$ . Довести, що  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ .
2. На прямій сидять дві білі та три чорні кішки. Сума відстаней від білих кішок до однієї чорної кішки дорівнює 11, до другої 7, а до третьої 9. Сума відстаней від чорних кішок до однієї білої кішки дорівнює 12, а до іншої 15. Які кішки можуть бути крайніми?
3. Довести, що існує натуральне число  $y$  таке, що рівність

$$\text{НСК}(x, y + 1) \cdot \text{НСК}(x + 1, y) = y(y + 1)$$

виконується принаймні при 2014 натуральних значеннях  $x$  (тут  $\text{НСК}(a, b)$  — найменше спільне кратне чисел  $a$  та  $b$ ).

4. У турнірі з квидичу брали участь 25 команд, кожна зіграла з кожною іншою один раз без нічиїх. Довести, що існують такі команди  $A, B, C, D, E, F$ , що команди  $A, B$  разом,  $C, D$  разом та  $E, F$  разом набрали однакову кількість перемог.
5. Нехай  $AD, BE$  — висоти, а  $CF$  — бісектриса гострокутного нерівнобедреного трикутника  $ABC$ , причому  $AE + BD = AB$ . Позначимо  $I_A, I_B, I_C$  точки перетину бісектрис трикутників  $AEF, BDF, CDE$  відповідно. Довести, що точки  $D, E, F, I_A, I_B$  та  $I_C$  лежать на одному колі.

На виконання завдання відводиться 4 години.

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

**Тринадцятий Киевский математический фестиваль**  
**10-й класс**

1. Пусть  $x, y, z$  — такие действительные числа, что  $(x - z)(y - z) = x + y + z - 3$ . Доказать, что  $x^2 + y^2 + z^2 \geq 3$ .
2. На прямой сидят две белые и три черные кошки. Сумма расстояний от белых кошек до одной черной кошки равна 11, до второй 7, а до третьей 9. Сумма расстояний от черных кошек до одной белой кошки равна 12, а до другой 15. Какие кошки могут быть крайними?
3. Доказать, что существует натуральное число  $y$  такое, что равенство

$$\text{НОК}(x, y + 1) \cdot \text{НОК}(x + 1, y) = y(y + 1)$$

выполняется хотя бы при 2014 натуральных значениях  $x$  (тут  $\text{НОК}(a, b)$  — наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$ ).

4. В турнире по квиддичу участвовали 25 команд, каждая сыграла с каждой другой один раз без ничьих. Доказать, что существуют такие команды  $A, B, C, D, E, F$ , что команды  $A, B$  вместе,  $C, D$  вместе и  $E, F$  вместе набрали одинаковое количество побед.
5. Пусть  $AD, BE$  — высоты, а  $CF$  — биссектриса остроугольного неравнобедренного треугольника  $ABC$ , причем  $AE + BD = AB$ . Обозначим  $I_A, I_B, I_C$  точки пересечения биссектрис треугольников  $AEF, BDF, CDE$  соответственно. Доказать, что точки  $D, E, F, I_A, I_B$  и  $I_C$  лежат на одной окружности.

На выполнение задания отводится 4 часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.