Шістнадцятий Київський математичний фестиваль
8-й клас

1. Декілька гномів стояли у ряд, а потім стали у ряд в іншому порядку. Чи може виявитися, що рівно у третини гномів залишилися обидва старі сусіди, а рівно у третини гномів залишився лише один старий сусід, якщо гномів було а) 6; б) 9?

2. Дано трикутник ABC. На продовженні AB за точку A відмітили точку D так, що $AD = BC$, а на продовженні BC за точку B відмітили точку E так, що $BE = AC$. Довести, що описане коло трикутника DEB проходить через центр вписаного кола трикутника ABC.

3. Кожну клітинку таблиці 7×7 пофарбували в один з декількох кольорів. Відомо, що для фарбування будь-яких двох різних рядків використали різну кількість кольорів та для фарбування будь-яких двох різних стовпчиків використали різну кількість кольорів. При якій найбільшій кількості кольорів у таблиці це можливо?

4. Двоє гравців по черзі кладуть дві або три монети кожен у свій капелюх (до початку гри капелюхи порожні). Кожного разу, коли обидва гравці зробили по п'ять ходів, вони обмінюються капелюхами. Виграє гравець, після ходу якого в його капелюсі стане сто або більше монет. Хто з гравців має виграшну стратегію?

5. Знайти всі пари цілих чисел (x, y), для яких $(x^2 + y)(y^2 + x) = (x + 1)(y + 1)$.

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Шестнадцатый Киевский математический фестиваль
8-й класс

1. Несколько гномов стояли в ряд, а потом стали в ряд в другом порядке. Могло ли оказаться, что ровно у трети гномов остались оба старых соседа, а ровно у трети гномов остался только один старый сосед, если гномов было а) 6; б) 9?

2. Дан треугольник ABC. На продолжении AB за точку A отметили точку D так, что $AD = BC$, а на продолжении BC за точку B отметили точку E так, что $BE = AC$. Доказать, что описанная окружность треугольника DEB проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC.

3. Каждую клетку таблицы 7×7 покрасили в один из нескольких цветов. Известно, что для покраски любых двух разных строк использовали разное количество цветов и для покраски любых двух разных столбцов использовали разное количество цветов. При каком наибольшем количестве цветов в таблице это возможно?

4. Двое игроков по очереди кладут две или три монеты каждый в свою шляпу (до начала игры шляпы пусты). Каждый раз, когда оба игрока сделали по пять ходов, они обмениваются шляпами. Выигрывает игрок, после хода которого в его шляпе станет сто или больше монет. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

5. Найти все пары целых чисел (x, y), для которых $(x^2 + y)(y^2 + x) = (x + 1)(y + 1)$.

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Шістнадцятий Київський математичний фестиваль
9-й клас

1. Декілька гномів стояли у ряд, а потім стали у ряд в іншому порядку. Чи може виявитися, що рівно у третини гномів залишилися обидва старі сусіди, а рівно у третини гномів залишився лише один старий сусід, якщо гномів було а) 6; б) 9?

2. Кожну клітинку таблиці 7×7 пофарбували в один з декількох кольорів. Відомо, що для фарбування будь-яких двох різних рядків використали різну кількість кольорів та для фарбування будь-яких двох різних стовпчиків використали різну кількість кольорів. При якій найбільшій кількості кольорів у таблиці це можливо?

3. На хорді AB кола ω відмітили точку C. Нехай D — середина AC, O — центр кола ω. Описане навколо трикутника BOD коло вдруге перетинає коло ω у точці E та пряму OC у точці F. Довести, що описане коло трикутника CEF дотикається до AB.

4. Про дійсні числа x, y відомо, що $x^2 \geq y$ та $y^2 \geq x$. Довести, що $\frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1} \leq 1$.

5. Двоє гравців по черзі кладуть дві або три монети кожен у свій капелюх (до початку гри капелюхи порожні). Кожного разу, коли другий гравець повторив хід першого гравця, вони обмінюються капелюхами. Виграє гравець, після ходу якого в його капелюсі стане сто або більше монет. Хто з гравців має виграшну стратегію?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Шестнадцатый Киевский математический фестиваль
9-й класс

1. Несколько гномов стояли в ряд, а потом стали в ряд в другом порядке. Могло ли оказаться, что ровно у трети гномов остались оба старых соседа, а ровно у трети гномов остался только один старый сосед, если гномов было а) 6; б) 9?

2. Каждую клетку таблицы 7×7 покрасили в один из нескольких цветов. Известно, что для покраски любых двух разных строк использовали разное количество цветов и для покраски любых двух разных столбцов использовали разное количество цветов. При каком наибольшем количестве цветов в таблице это возможно?

3. На хорде AB окружности ω отметили точку C. Пусть D — середина AC, O — центр окружности ω. Описанная вокруг треугольника BOD окружность вторично пересекает окружность ω в точке E и прямую OC в точке F. Доказать, что описанная окружность треугольника CEF касается AB.

4. Про действительные числа x, y известно, что $x^2 \geq y$ и $y^2 \geq x$. Доказать, что $\frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1} \leq 1$.

5. Двое игроков по очереди кладут две или три монеты каждый в свою шляпу (до начала игры шляпы пусты). Каждый раз, когда второй игрок повторил ход первого игрока, они обмениваются шляпами. Выигрывает игрок, после хода которого в его шляпе станет сто или больше монет. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Шістнадцятий Київський математичний фестиваль
10-й клас

1. Декілька гномів стояли у ряд, а потім стали у ряд в іншому порядку. Чи може виявитися, що рівно у третини гномів змінилися обидва сусіди, а рівно у третини гномів з'явився лише один новий сусід, якщо гномів було а) 9; б) 12?

2. Про дійсні числа x, y відомо, що $x^2 \geq y$ та $y^2 \geq x$. Довести, що $\frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1} \leq 1$.

3. На хорді AB кола ω відмітили точку C. Нехай D — середина AC, O — центр кола ω. Описане навколо трикутника BOD коло вдруге перетинає коло ω у точці E та пряму OC у точці F. Довести, що описане коло трикутника CEF дотикається до AB.

4. Двоє гравців по черзі кладуть дві або три монети кожен у свій капелюх (до початку гри капелюхи порожні). Кожного разу, коли другий гравець повторив хід першого гравця, вони обмінюються капелюхами. Виграє гравець, після ходу якого в його капелюсі стане сто або більше монет. Хто з гравців має виграшну стратегію?

5. На площині дано трикутник ABC, усі вершини якого мають цілі координати. Чи обов'язково існує пряма, яка перетинає прямі AB, BC та AC у трьох різних точках з цілими координатами?

На виконання завдання відводиться 4 години. Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Шестнадцатый Киевский математический фестиваль
10-й класс

1. Несколько гномов стояли в ряд, а потом стали в ряд в другом порядке. Могло ли оказаться, что ровно у трети гномов поменялись оба соседа, а ровно у трети гномов появился только один новый сосед, если гномов было а) 9; б) 12?

2. Про действительные числа x, y известно, что $x^2 \geq y$ и $y^2 \geq x$. Доказать, что $\frac{x}{y^2+1} + \frac{y}{x^2+1} \leq 1$.

3. На хорде AB окружности ω отметили точку C. Пусть D — середина AC, O — центр окружности ω. Описанная вокруг треугольника BOD окружность вторично пересекает окружность ω в точке E и прямую OC в точке F. Доказать, что описанная окружность треугольника CEF касается AB.

4. Двое игроков по очереди кладут две или три монеты каждый в свою шляпу (до начала игры шляпы пусты). Каждый раз, когда второй игрок повторил ход первого игрока, они обмениваются шляпами. Выигрывает игрок, после хода которого в его шляпе станет сто или больше монет. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

5. На плоскости дан треугольник ABC, все вершины которого имеют целые координаты. Обязательно ли существует прямая, которая пересекает прямые AB, BC и AC в трёх разных точках с целыми координатами?

На выполнение задания отводится 4 часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.