

XXIV Київський математичний фестиваль

Розв'язки задач математичного бою

Задача 1 для 7-8 класів.

Петрик та Дарина грають в наступну гру. В корзині лежать 20 яблук та 10 груш. Гравці беруть яблука та груші з корзини по черзі, починаючи з Петрика, причому кожний бере один або два фрукти. Виграє той, після ходу якого або не залишиться груш, або кількість яблук та груш буде однаковою. Хто з гравців може діяти таким чином, щоб виграти незалежно від дій суперника?

Розв'язок.

Нехай a – це кількість яблук, b – це кількість груш в корзині в початковій позиції. Доведемо, що за умови $a > b$, $b > 0$ другий гравець (Дарина) виграє тоді і тільки тоді коли $a - b \geq 3$, $b \geq 3$ та $a + b$ ділиться на 3. Тобто якщо, наприклад, $a = 20$, $b = 10$, то виграє другий гравець.

Нехай після ходу першого гравця, який взяв x фруктів, маємо a_1 яблук та b_1 груш. Розглянемо випадки

1. Якщо $a_1 - b_1 \geq 3$, $b_1 > 3$ та $x = 2$, тоді другий гравець завжди може взяти 1 грушу, щоб задовільнити всі умови. Дійсно перша та друга умова очевидно залишиться, а третя буде задовільнена автоматично, бо після двох ходів всього буде взято 3 фрукти,
2. Якщо $a_1 - b_1 \geq 3$, $b_1 > 3$ та $x = 1$, тоді другий гравець завжди може взяти 1 грушу та 1 яблуко, щоб задовільнити всі умови, аналогічно до попереднього випадку.
3. Якщо $a_1 - b_1 \geq 3$ та $b_1 = 3$, тоді другий гравець завжди може взяти $3 - x$ яблук, так щоб задовільнити всі умови. Дійсно друга та третя умова будуть очевидно виконані, а для того щоб порушилася перша умова необхідно щоб було $a_1 - b_1 = 3$ або $a_1 - b_1 = 4$, $x = 1$. Але обидва випадки неможливі, бо в першому випадку маємо що $a_1 + b_1$ ділиться на 3, а в другому випадку що $a_1 + b_1$ має залишок 1 при діленні на 3, але це означає що перший гравець мав взяти два фрукти а не один.
4. Якщо $a_1 - b_1 < 3$ то другий гравець може вирівняти кількість яблук та груш.
5. Якщо $b_1 < 3$ то другий гравець може забрати всі груші.

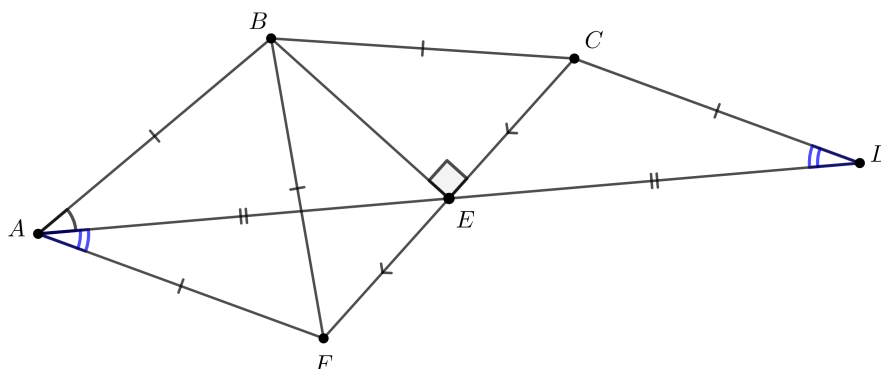
Таким чином вказані дії або зберігають задані умови або приводять до виграшу другого гравця і тому задають виграшну стратегію для другого гравця в таких позиціях.

Аналогічні міркування можна застосувати, щоб показати що в усіх інших позиціях перший гравець може або відразу виграти або залишити позицію з заданими умовами. Тому в усіх інших позиціях виграшна стратегія є у першого гравця.

Задача 2 для 7-8 класів.

В опуклому чотирикутнику $ABCD$ виконується $AB = BC = CD$. Точка E середина AD та виявилось, що $\angle BEC = 90^\circ$. Знайдіть $\angle BAD + \angle CDA$.

Розв'язок.



Нехай F точка симетрична C відносно E . Тоді $\triangle CED = \triangle FEA$ (за двома сторонами та кутом між ними) $\Rightarrow \angle FAE = \angle CDE$ та $CD = AF$. В трикутнику CBF BE це висота і медіана, тоді $BC = BF \Rightarrow AB = BF = FA$, тобто $\triangle ABF$ - рівносторонній $\Rightarrow 60^\circ = \angle BAF = \angle BAD + \angle FAE = \angle BAD + \angle CDA$.

Задача 3 для 7-8 класів.

По колу записано $n \geq 3$ нулів. Дозволяється одночасно додати 1 до будь-яких k чисел, які стоять на колі поспіль, де $k < n$ – фіксоване. Для яких n та k можна за допомогою декількох вказаних операцій зробити так, що рівно одне число на колі буде непарним?

Розв'язок.

Нехай $2n$ та k є взаємно простими. Тоді існують такі числа l, m , що $kl = 2nm + 1$. Додамо 1 до будь-яких k чисел поспіль, потім до k чисел поспіль, які йдуть відразу за попередніми і т.д., повторюючи це рівно l разів. Після такої операції на колі будуть стояти $n - 1$ чисел $2m$ та одне число $2m + 1$, тобто рівно одне непарне число.

Нехай $2n$ та k мають спільний простий дільник p , та припустимо що шукана послідовність операцій можлива. Якщо $p = 2$, то k – парне. Розглянемо a – кількість непарних чисел на колі. Зрозуміло, що при парному k парність числа a після однієї операції не змінюється. Але оскільки на початку a дорівнює 0, то зробити його рівним 1 неможливо, тобто маємо протиріччя.

Нехай $p > 2$ тоді $n = mp$. Зафіксуємо те число на колі, яке стає непарним після розглянутої послідовності операцій та розглянемо b_1 – кількість непарних чисел на місцях на відстані $0, p, 2p \dots (m-1)p$ від зафіксованого числа, а також b_2 – кількість непарних чисел на місцях на відстані $1, p+1, 2p+1 \dots (m-1)p+1$ від зафіксованого числа. Неважко побачити що одна операція змінює парність однакової кількості чисел в кожному наборі, тобто парність різниці $b_2 - b_1$ не змінюється. Але на початку $b_2 = b_1 = 0$, а після всіх операцій $b_2 = 1, b_1 = 0$, тобто маємо протиріччя.

Задача 1 для 9-10 класів.

В деякій послідовності, яка складається з n нулів та n одиниць, де $n \geq 3$, дозволяється поміняти місцями або довільні пари сусідніх чисел 00 та 11, або довільні пари сусідніх чисел 01 та 10. Для яких n можна таким чином з послідовності 0101...01 отримати послідовність 1010...10?

Розв'язок.

Доведемо, що це не можна зробити для непарного n . Для цього розглянемо, як змінюється при заданій операції кількість одиниць на парних місцях x та кількість одиниць на непарних місцях y . Неважко побачити, що при зміні місцями 00 та 11 значення x та y взагалі не змінюються. Якщо ж міняти місцями 01 з 10 то, в залежності від того чи є парними позиції цих пар, x, y перейдуть або знову в x, y , або в $x-2, y+2$, або в $x+2, y-2$.

Тобто бачимо, що парність x та y зберігається, звідки випливає, що послідовності 101010...10 та 010101...01 не можуть перейти одна в одну за допомогою вказаної операції при непарному n .

Покажемо, що для всіх парних $n > 2$ ці дві послідовності можуть перейти одна в одну. Для цього достатньо показати, що це можливо для $n = 4$ та для $n = 6$.

Для $n = 4$:

01010101, 00110110, 11000110, 10101010

Для $n = 6$:

010101010101, 001101100101, 110001100101,

111100000101, 111010000110, 110110001010,

101110010010, 101001110010, 101010101010

Задача 2 для 9-10 класів.

По колу записано $n \geq 3$ цілих чисел, причому деякі два сусідні числа на колі це 0 та 1. Окрім того, для деякого $m \geq 3$ відомо, що залишок при діленні на m будь-якого числа на колі дорівнює залишку при діленні на m суми двох сусідніх чисел, які знаходяться поруч з цим числом в напрямку за годинниковою стрілкою. Довести, що n є парним.

Розв'язок.

Покладемо, $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n = 2, 3, 4, \dots$. Помітимо, що $f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n$ при $n = 1, 2, \dots$. Дійсно при $n = 1, 2$ це легко перевірити, та окрім того, якщо це виконується при всіх $k = 1, \dots, n-1$, то

$$\begin{aligned} f_{n-1}f_{n+1} - f_n^2 &= (f_{n-2} + f_{n-3})(f_n + f_{n-1}) - (f_{n-1} + f_{n-2})^2 = \\ &= (-1)^{n-1} + (-1)^{n-2} + f_{n-2}f_{n-1} + f_{n-3}f_n - 2f_{n-1}f_{n-2} = \\ &= f_{n-1}^2 - f_{n-2}^2 - f_{n-2}f_{n-1} = f_{n-1}^2 - f_{n-2}f_n = -(-1)^{n-1} = (-1)^n \end{aligned}$$

Розглянемо залишки всіх чисел на колі при діленні на m . Оскільки деякі два сусідніх числа це 0 та 1, то, розглядаючи два можливих варіанта, отримаємо, що деякі два сусідніх залишки це 0 та 1 в порядку

за годинниковою стрілкою. Тому залишки чисел на колі при діленні на m співпадають з $f_0, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$ і окрім того $f_{k+n} - f_k$ має ділитися на m при $k = 0, 1, \dots$

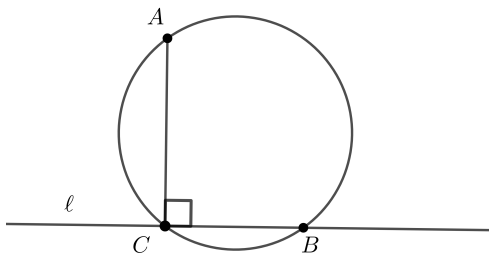
Але це означає, що $f_0 f_2 - f_1^2 = -1$ має такий самий залишок при діленні на m , як і $f_n f_{n+2} - f_{n+1}^2 = (-1)^{n+1}$. Тому n має бути парним, бо інакше -1 має такий самий залишок при діленні на m як і 1 , що неможливо.

Задача 3 для 9-10 класів.

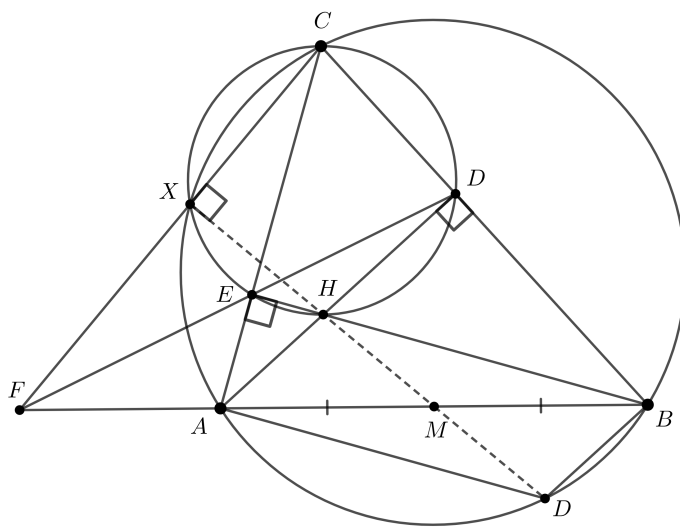
У Степана є нескінченна лінійка без поділок та "дивний циркуль" який може для обраних точок A та B побудувати коло з діаметром AB . Чи зможе Степан за допомогою цих інструментів побудувати коло з центром в точці O , яке проходить через точку C ?

Розв'язок.

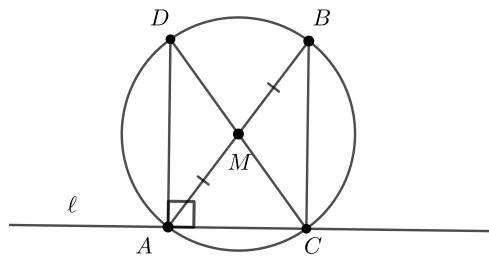
Крок 1. Побудуємо перпендикуляр з точки $A \notin \ell$ на пряму ℓ . Оберемо точку B на прямій ℓ , побудуємо коло з діаметром AB та перетнемо з ℓ в точці C . Тоді $AC \perp \ell$ є шуканою.



Крок 2. Побудуємо середину відрізка AB . Нехай C це точка, що не лежить на прямій AB . Проведемо висоти AD та BE трикутника ABC та відмітимо їх точку перетину H . Перетнемо пряму DE з прямою AB в точці F . Перетнемо пряму CF з колом з діаметром CH в точці $X \neq C$. Нехай пряма XH перетинає AB в точці M . Доведемо, що M - це середина AB . Помітимо, що чотирикутники $ABCX$ та $ABDE$ є вписаними, тоді $\angle CXH = \angle CDE = \angle CBE = \angle CAX \Rightarrow CXHE$ вписаний. Тепер нехай CD діаметр описаного кола трикутника ABC . З властивості ортоцентра $AHBD$ - паралелограм, тобто пряма HD проходить через середину AB , але $\angle CXH = \angle CXD = 90^\circ \Rightarrow X, H, D$ лежать на одній прямій. Звідки випливає, що M середина відрізка AB .



Крок 3. Побудуємо перпендикуляр з точки $A \in \ell$ до прямої ℓ . Нехай точка $B \notin \ell$ та відмітимо M середину AB . Побудуємо коло з діаметром AB та перетнемо з ℓ в C , перетнемо пряму CM з цим колом та отримаємо точку D . Тоді $ACBD$ - це прямокутник, а отже $AD \perp \ell$ є шуканою прямою.



Крок 4. Побудуємо пряму яка проходить крізь точку $A \notin \ell$ паралельно до ℓ . Опустимо перпендикуляр AD на пряму ℓ ($D \in \ell$). Проведемо, перпендикуляр n крізь A до AD , тоді $n \parallel \ell$ є шуканою прямою.

Крок 5. Дано точки O та C , побудуємо коло з центром O яке проходить крізь C . Позначимо точку $A \notin OC$ та відмітимо середину M відрізка CA . Крізь A проведемо пряму паралельну до OM та перетнемо з OC в точці B . За теоремою Фалеса $CO = OB$, тоді коло з діаметром CB є шуканим.

