

XXIV Київський математичний фестиваль

Розв'язки задач індивідуальної онлайн-олімпіади

Задача 1 для 7-8 класів.

На площині розташовано n попарно не паралельних прямих, жодні три з яких не перетинаються в одній точці. Відрізок, що сполучає дві точки перетину якихось з цих прямих називається “свіжим”, якщо він не лежить на жодній з початкових n прямих. Знайти кількість свіжих відрізків.

Розв'язок.

Позначимо A множину точок перетину в заданій конфігурації прямих. Кожна пряма містить рівно $n-1$ точок з A . Будь-які дві прямі містять рівно $2(n-1)-1 = 2n-3$ точок з A (так як дві прямі перетинаються в точці з A). Розглянемо точку $x \in A$, яка є точкою перетину прямих ℓ та ℓ' . Відрізок, який сполучає точку x з точкою, що належить $A \cap (\ell \cup \ell')$, не є свіжим (так як він лежить або на прямій ℓ , або на прямій ℓ'). Розглянемо точку $w \in A$, яка не належить $\ell \cup \ell'$ (таких точок рівно $\frac{n(n-1)}{2} - 2n + 3$). Відрізок, який сполучає x та w є свіжим (інакше в точці x перетиналось би три прямі). Отже, сполучення точки x з точками множини A дає рівно $\frac{n(n-1)}{2} - 2n + 3$ свіжих відрізків. Якщо порахувати $\frac{n(n-1)}{2} - 2n + 3$ свіжих відрізків для кожної точки $x \in A$, то кожний свіжий відрізок буде пораховано двічі. Отже, кількість свіжих відрізків дорівнює

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \times \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{n(n-1)}{2} - 2n + 3 \right) &= \frac{n(n-1)}{4} \times \frac{n^2 - 5n + 6}{2} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}. \end{aligned}$$

Задача 2 для 7-8 класів.

Дано натуральні числа $k > 2$, n та просте число p такі, що

$$n + p = (n - p)^k.$$

Довести, що $k-1$ та $n-2$ є простими числами.

Розв'язок.

З умови випливає, що $n + p$ має ділитися на $n - p$, тоді $2p$ ділиться на $n - p$. Тому можливі наступні випадки:

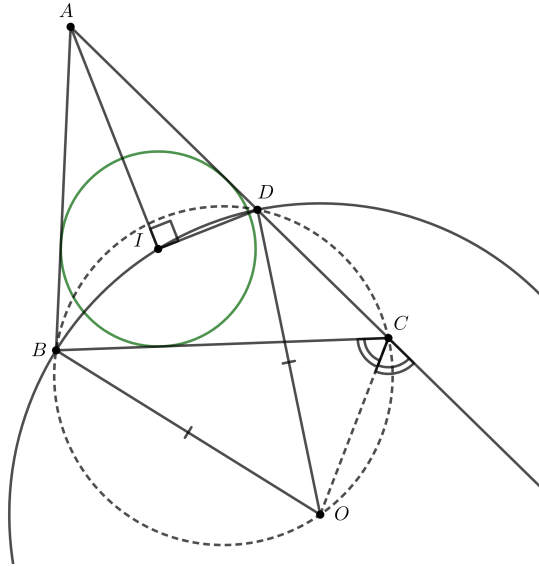
- 1) $n - p = \pm 1$, тоді $n + p = (\pm 1)^k = \pm 1$, що очевидно неможливо.
- 2) $n - p = 2$, тоді $2p + 2 = 2^k \Rightarrow p = 2^{k-1} - 1$. Якщо припустити, що $k - 1 = ab$ ($a, b > 1$), то $p = 2^{k-1} - 1 = 2^{ab} - 1 = (2^a)^b - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + \dots + 2^a + 1)$. Оскільки $a, b > 1$, то обидва множники більше 1, що суперечить простоті числа p . Тому в цьому випадку $k - 1$ має бути простим.
- 3) $n - p = -2$, тоді $2p - 2 = (-2)^k \Rightarrow p = (-1)^k 2^{k-1} + 1$. Якщо k - непарне, то $p = 1 - 2^{k-1}$, що неможливо. Якщо k - парне, то $p = 2^{k-1} + 1$ ділиться на 3, тому $p = 3$ та $k = 2$.
- 4) $n - p = p$, тоді $3p = p^k \Rightarrow p^{k-1} = 3 \Rightarrow p = 3, k = 2$.
- 5) $n - p = 2p$ тоді $n = 3p$ та $4p = 2^k p^k \Rightarrow 2^{k-2} p^{k-1} = 1$, що теж неможливо.

Проаналізувавши всі випадки робимо висновок, що $k-1 > 1$ має бути простим, а $n-2 = p$ і тому теж є простим.

Задача 3 для 7-8 класів.

У трикутник ABC вписане коло з центром I . Точка D на стороні AC така, що $\angle AID = 90^\circ$. Довести, що центр описаного кола трикутника BID лежить на бісектрисі зовнішнього кута $\angle ACB$.

Розв'язок.



Нехай O центр описаного кола трикутника BID .

$$\angle BID = 360^\circ - (\angle BIA + \angle AID) = 360^\circ - (90^\circ + \frac{\angle C}{2} + 90^\circ) = 180^\circ - \frac{\angle C}{2}.$$

Оскільки $\angle BID = 180^\circ - \frac{\angle C}{2}$, то градусна міра дуги BD яка не містить точку I дорівнює $360^\circ - \angle A$. Тоді градусна міра дуги BID дорівнює $\angle C$, тобто $\angle BOD = \angle C$. Звідки чотирикутник $BDOC$ є вписаним, але оскільки $BO = DO$, то O лежить на зовнішній бісектрисі $\angle C$.

Задача 4 для 7-8 та 9-10 класів.

Для яких натуральних чисел $n \geq 3$ можна розташувати по колу n різних дійсних чисел так, що кожне з цих чисел дорівнює різниці своїх сусідів?

Розв'язок.

Доведемо, що при $n > 3$ таких чисел немає. Нехай таке розташування існує. За умови для кожних трьох чисел a, b, c , які стоять в такому ж порядку на колі, якщо рухатися за годинниковою стрілкою, виконується $b = a - c$ або $b = c - a$. Припустимо, що обидва ці варіанти можливі, тоді існують такі чотири числа a, b, c, d , які стоять в такому ж порядку на колі, якщо рухатися за годинниковою стрілкою, для яких виконується $b = a - c$, $c = d - b$. Але тоді $a = b + c = d$, і порушується умова, що всі числа мають бути різними.

Звідси випливає, що у всіх випадках різниця має бути однакового типу, тобто для трьох чисел a, b, c , які стоять в такому ж порядку на колі, якщо рухатися за годинниковою стрілкою, завжди виконується $b = a - c$ або завжди виконується $b = c - a$. Тобто, якщо ми візьмемо a, b, c, d – чотири послідовні числа на колі, то можна вважати, що $b = c - a$, $c = d - b$. Причому a, b, c, d можна вибрати таким чином, що число c є більше всіх інших чисел на колі, в тому числі $c \geq a$, $c \geq d$. Але тоді $b = d - c \leq 0$ та $a = c - b \geq c \geq a$, тобто $a = c$, що неможливо. Таким чином шуканого розташування не існує.

Нехай $n = 3$, а на колі стоять числа a, b, c . Оскільки якісь два сусідніх числа завжди дорівнюють різниці сусідів однакового типу, то, не обмежуючи загальності, можна припустити, що $b = c - a$, $c = a - b$. При цьому $c = a + b$, $a = b + c = a + 2b$. Але тоді $b = 0$ та $a = c$, тобто деякі числа на колі співпадають.

Задача 1 для 9-10 класів.

Чи існують такі невід'ємні числа a, b, c , що $a^2 + b \geq 1$, $b^2 + c \geq 1$, $c^2 + a \geq 1$ та $a + b + c \leq \frac{8}{5}$?

Розв'язок.

Розглянемо a, b, c для яких виконуються всі нерівності. Нехай a – найменше з цих чисел, тобто $a \leq b$, $a \leq c$. Таке припущення не обмежує загальності, оскільки заданий набір нерівностей зберігається при циклічній перестановці, тобто при заміні a, b, c на b, c, a . Тоді $c^2 + c \geq c^2 + a \geq 1$.

Покладемо $t = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, тоді $t^2 + t = 1$. Якщо $c < t$, то, оскільки також $c \geq 0$, отримуємо $c^2 + c < t^2 + t = 1$, що є протиріччям до доведеного вище, тому $c \geq t$. Окрім того $a \leq 1$, бо інакше $a + b + c \geq 3a > 3$. З урахуванням цього маємо:

$$a + b + c \geq a^2 + b + c \geq 1 + c \geq t + 1 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} > \frac{8}{5}.$$

Задача 2 для 9-10 класів.

Нехай $P(n)$ – це кількість натуральних чисел, менших n та взаємно простих з n . Чи існує таке непарне натуральне число k та два різних непарних складених натуральних числа $n_1 \neq n_2$ такі, що $P(n_1) = P(n_2) = 4k$?

Розв'язок.

Покладемо $n_1 = 37^2$, $n_2 = 223 \cdot 3^2$.

Оскільки всі числа менші за 37^2 які мають спільний дільник з 37 мають вигляд $37k$, $k = 1, 2, \dots, 36$ то всього їх рівно 36. Тоді кількість чисел взаємно простих з 37^2 та менше 37^2 дорівнює $37^2 - 1 - 36 = 37 \cdot 36 = 37 \cdot 3^2 \cdot 2^2$.

Оскільки 223 просте число, то всі числа менші за $223 \cdot 3^2$ які мають спільний дільник з $223 \cdot 3^2$ мають вигляд або $3k$, $k = 1, 2, \dots, 223 \cdot 3 - 1$ або $223k$, $k = 1, 2, \dots, 8$. Причому ці два набори чисел мають рівно два спільних числа, а кількість чисел в кожному наборі дорівнює $223 \cdot 3 - 1$ та 8 відповідно. Тому кількість чисел взаємно простих з $223 \cdot 3^2$ та менше $223 \cdot 3^2$ дорівнює $223 \cdot 3^2 - 1 - (223 \cdot 3 - 1) - 8 + 2 = 222 \cdot 3 \cdot 2 = 37 \cdot 3^2 \cdot 2^2$.

Задача 3 для 9-10 класів.

У вписаному чотирикутнику $ABCD$ прямі BC та AD перетинаються в точці E . На стороні BC відмітили таку точку X , що $\angle BAX = \angle CDX$. Точка Y симетрична точці X відносно точки E . Довести, що $\angle CDY + \angle BAY = 180^\circ$.

Розв'язок.

Оскільки $ABCD$ вписаний, то $\angle DCE = \angle BAD$. Також $\angle BAX + \angle XAD = \angle BAD = \angle DCE = \angle CDX + \angle CXD = \angle BAX + \angle CXD$, тому $\angle XAD = \angle EXD$ звідки описане коло трикутника XAD дотикається до прямої EX . Але з властивості дотичної $ED \cdot EA = EX^2 = EY^2$, тому описане коло трикутника ADY дотикається до EY . Тобто

$$\begin{aligned} \angle DYE = \angle DAY \Rightarrow \angle XDY = 180^\circ - \angle EXD - \angle EYD = 180^\circ - \angle DAY - \angle XAD = 180^\circ - \angle XAY \Rightarrow \\ 180^\circ = \angle XAY + \angle XDY = (\angle CDY + \angle XCD) + (\angle BAY - \angle BAX) = \angle CDY + \angle BAY. \end{aligned}$$

